

ЛЕКЦИЯ-11

6. БІРІНШІ ТЕКТІ ИНТЕГРАЛДЫҚ ТЕНДЕУЛЕР

§ 6.1. Вольтеранның бірінші текті тендеуі

Вольтеранның 1-текті интегралдық тендеуін қарастырайық:

$$\int_a^x K(x,s)\varphi(s)ds = f(x), \quad (96)$$

мұндағы, $K(x,s)$ пен $f(x)$ функциялары белгілі, ал $\varphi(x)$ белгісіз функциялар. Екінші текті интегралдық тендеуге қарағанда бұл тендеудің шешімі бар болуы үшін кейбір жаңа шарттар қою керек. Ол үшін

$$\int_a^x \varphi(s)ds = f(x)$$

тендеуін қарастырайық. Бұл тендеудің шешімін $C[a,b]$ класынан іздейік. Бұл жағдайда тендеу шешілуі үшін $f(a)=0$ болуы қажет және $f(x)$ функциясының $[a,b]$ кесіндіде үзіліссіз туындысы бар болуы керек, яғни тендеудің оң жағы кез келген функция емес.

Енді (96) тендеуін қарастырайық. Ол тендеудің үзіліссіз $\varphi(x)$ шешім бар болуы үшін $f(a)=0$ болуы қажетті. Оның үстіне, егер $\frac{d}{dx}K(x,s) \in C[a,b]$ болса, онда $f'(x) \in C[a,b]$. (96) тендеуінің екі жағында x бойынша дифференциалдап,

$$K(x,x)\varphi(x) + \int_a^x K'_x(x,s)\varphi(s)ds = f'(x) \quad (97)$$

тендеуін аламыз. Мұндағы, $K(x,x) \neq 0$, $x \in [a,b]$ болсын. Бұл тендеуді $K(x,x)$ функциясына бөліп,

$$\varphi(x) + \int_a^x \frac{K'_x(x,s)}{K(x,x)}\varphi(s)ds = \frac{f'(x)}{K(x,x)} \quad (98)$$

2-текті Вольтерра тендеуін аламыз. (98) тендеуін жоғарыдағы айтылған әдістермен шешу арқылы біртекті (96) интегралдық тендеуінің шешімін табамыз.

Егер $K(x,x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндінің кейбір нүктелерінде нөлге айналса (мәселен, $x=c$ нүктесінде), онда (98) тендеуі 2-текті тендеудің қасиеттерінен бөлек, ерекше қасиетке ие болады. Мұндай тендеуді Пикар анықтамасы бойынша 3-текті деп атайды. Ондай тендеулерді біз қарастырмаймыз.

Кейбір жағдайда $K(x, x) = 0$ болса, (97) теңдеуі тағы да 1-текті теңдеу түрінде қалады:

$$\int_a^x K'_x(x, s) \varphi(s) ds = f'(x),$$

бұған тағы да (96) теңдеуін 2-текті теңдеуге келтіру әдісін қолданамыз, бірақ бұл жағдайда $K(x, s)$ пен $f(x)$ функциялары $C^2[a, b]$ класында болуы керек.

Ескерту. Егер $K(x, x)$ функциясы $[a, b]$ кесіндісінің оңашаланған $c_1 < c_2 < \dots$ нүктелерінде нөлге айналса, онда (96) интегралын жеке-жеке аралықтарда қарастырып, (98) теңдеуіне келтіреді.

Мысалы, $0 \leq x \leq \pi$, $0 < s < x$ болғанда

$$\int_a^x \cos(x+s) \varphi(s) ds = f(x)$$

теңдеуін қарастырайық. Бұл теңдеуді x бойынша дифференциалдап, 2-текті теңдеуді аламыз:

$$\cos 2x \varphi(x) - \int_0^x \sin(x+s) \varphi(s) ds = f'(x).$$

Ал $\cos 2x = 0$ теңдеуінің түбірлері $x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \dots$. Егер $x \in \left(0, \left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ болса, онда $\cos 2x \neq 0$, сондықтан

$$\varphi(x) - \int_0^x \frac{\sin(x+s)}{\cos 2x} \varphi(s) ds = \frac{f'(x)}{\cos 2x}, \quad x \in \left(0, \left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

екінші текті теңдеуі шығады. Басқа нүктелер үшін де осы әдісті қолданамыз.

§ 6.2. Абель теңдеуі

$$\int_0^t \frac{\varphi(s)}{\sqrt{t-s}} ds = f(t)$$

Абель теңдеуін қарастырайық. Бұл теңдеуді t бойынша дифференциалдауға болмайды. Ядросы $K(t, s) = \frac{1}{\sqrt{t-s}}$ әлсіз ерекшелікті, сондықтан бұл теңдеуді 2-текті Вольтерра теңдеуіне басқаша келтіру әдісін қолданамыз. Ол үшін теңдеуді $\frac{1}{\sqrt{x-t}}$ өрнегіне көбейтіп, содан соң t бойынша 0-ден x -ке дейін интегралдап,

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} \left(\int_0^t \frac{\varphi(s)}{\sqrt{t-s}} ds \right) dt = \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}} dt$$

теңдеуін аламыз. Бұған Дирихленің интегралды түрлендіру формуласын қолданып,

$$\int_0^x \varphi(s) \left\{ \int_s^x \frac{dt}{\sqrt{(t-s)(x-t)}} \right\} ds = \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}} dt$$

деп жазып, мұнда $\int_s^x \frac{dt}{\sqrt{(t-s)(x-t)}} = \pi$ екенін пайдалансақ,

$$\int_0^x \varphi(s) ds = \frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}} dt$$

теңдеуі шығады. Ал бұл теңдеуді x бойынша дифференциалдап,

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}} dt$$

бастапқы берілген теңдеудің шешімін табамыз. Егер $f(x)$ дифференциалданатын функция болса, онда соңғы формуладан

$$\varphi(x) = \frac{f(0)}{\pi\sqrt{x}} + \frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{f'(s)}{\sqrt{x-s}} ds$$

болады.

Дәл осы жолмен Абельдің күрделі интегралдық теңдеуін

$$\int_0^x \frac{\varphi(s)}{(x-s)^\alpha} ds = f(x) \quad (0 \leq \alpha < 1) \quad (99)$$

шешуге болады. Ол үшін теңдеудегі x айнымалысын t -мен ауыстырып, одан кейін ол теңдеудің екі жағын $\frac{1}{(x-t)^{1-\alpha}}$ өрнегіне көбейтіп, t бойынша 0-ден x -ке дейін интегралдап,

$$\int_0^x \frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \left(\int_0^t \frac{\varphi(s)}{(t-s)^\alpha} ds \right) = \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt$$

немесе

$$\int_0^x \varphi(s) \left(\int_s^x \frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha} (t-s)^\alpha} \right) ds = \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt$$

теңдеуін аламыз. Бұл теңдеуден

$$\int_s^x \frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha}(t-s)^\alpha} = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$$

болғандықтан

$$\int_0^x \varphi(s) ds = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \cdot \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt$$

теңдеуі шығады. Осы соңғы теңдікті x бойынша дифференциалдап,

$$\varphi(x) = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt$$

(99) теңдеуінің шешімін табамыз.

Ескерту. Егер (99) теңдеуіндегі α бірден кіші кез келген сан болса, онда кез келген жатық $f(x)$ функциясы үшін ол теңдеуді жоғарыда қарастырған жағдайға келтіре аламыз.

Расында, егер $\alpha < 0$ болса, онда $-\alpha > 0$. Сондықтан (99) теңдеуін x бойынша дифференциалдап,

$$(-\alpha) \int_0^x (x-s)^{-(\alpha+1)} \varphi(s) ds = f'(x),$$

$$\alpha(\alpha+1) \int_0^x (x-s)^{-(\alpha+2)} \varphi(s) ds = f''(x), \dots$$

теңдеулері тізбегін $1 > \alpha + k > \alpha$ болғанша жалғастыра береміз.

Ең соңында Вольтерраның 1-текті әлсіз ядорлы

$$\int_0^t \frac{H(t,s)}{(t-s)^\alpha} \varphi(s) ds = f(t) \quad (0 < \alpha < 1)$$

теңдеуін қарастырайық, мұндағы, $H(t,s)$ пен $\frac{\partial H(t,s)}{\partial t}$ үзіліссіз және шенелген функциялар. Бұл теңдеуді шешу үшін оны $\frac{1}{(x-t)^{1-\alpha}}$ өрнегіне көбейтіп, пайда болған өрнекті t бойынша 0-ден x -ке дейін интегралдап,

$$\int_0^x \frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \int_0^t \frac{H(t,s)}{(t-s)^\alpha} \varphi(s) ds = \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt$$

немесе

$$\int_0^x \bar{H}(x,s) \varphi(s) ds = \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \quad (100)$$

теңдеуін аламыз, мұндағы,

$$\bar{H}(x, s) = \int_s^x \frac{H(t, s)}{(x-t)^{1-\alpha} (t-s)^\alpha} dt = \int_0^1 \frac{H(s+z(x-s), s)}{(1-z)^{1-\alpha} z^\alpha} dz,$$

ал бұл регулярлы ядро, себебі

$$|\bar{H}(x, s)| \leq M \int_0^1 \frac{dt}{(1-t)^{1-\alpha} t^\alpha} = \frac{M\pi}{\sin \pi\alpha}, |H(x, s)| \leq M.$$

Демек, (100) теңдеуі шенелген ядорлы интегралдық теңдеу. Егер $H(x, x) \neq 0$ болса, онда $\bar{H}(x, x) \neq 0$. Сондықтан (100) теңдеуін 2-текті интегралдық теңдеуге келтіруге болады екен.

§ 6.3. Фредгольмнің бірінші текті теңдеуі

Фредгольмнің 1-текті

$$\int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds = f(x) \quad (101)$$

теңдеуін қарастырайық. Бұндай теңдеу әрқашан шешіле бермейді. Мысалы $\int_0^1 \varphi(s) ds = f(x)$ теңдеуі кез келген $f(x)$ үшін шешіле бермейді. Егер бұл теңдеуде $f(x) = 1$ болса, оның шешімі $\varphi(x) = 1$ болады. Онымен қоса $\varphi(x) = 1 + \alpha x + \beta$ функцияда α мен β тұрақты шамалары $\alpha + 2\beta = 0$ шартын қанағаттандырса, онда теңдеу шешіледі, яғни теңдеудің ақырсыз көп шешімі бар болады.

Егер (101) теңдеуіндегі $K(x, s)$ симметриялық ядро болса, онда Шмидт теоремасы бойынша

$$\int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds = 0$$

1-текті интегралдық теңдеудің шешімдері $K(x, s)$ ядросының барлық меншікті функцияларына ортогональ функциялармен дәл келеді. Егер $K(x, s)$ тұйық ядро болса, бұл теңдеудің тек нөлдік шешімі ғана бар болады. Егер ядро тұйық болмаса (мәселен, ерекшеленген ядро болса), онда теңдеудің ақырлы немесе санақты жиында сызықты тәуелсіз жиында, сызықты тәуелсіз шешімдері бар болады.

Енді $f(x) \neq 0$ болған кездегі (101) теңдеуін қарастырайық. Гильберт-Шмид теоремасы бойынша (101) теңдеуінің шешімі бар болуы үшін $f(x)$

функциясы $K(x,s)$ ядросының меншікті функциялары $\{\varphi_i(x)\}$ жүйесі бойынша қатарға жіктелуі қажет, яғни

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (f, \varphi_i) \varphi_i(x).$$

Міне осы шарт орындалса, (101) теңдеуінің шешімін

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(x)$$

түрінде іздеуге болады, мұндағы, c_i -белгісіз тұрақты шамалар. Соңғы қатарды (101) теңдеуіне қойып, оны алдыңғы қатармен салыстырсақ, $\frac{c_i}{\lambda_i} = (f, \varphi_i)$, яғни $c_i = \lambda_i (f, \varphi_i)$, $i=1,2,\dots$

Теорема (Пикар). Тұйық симметриялық $K(x,s)$ ядролы

$$\int_a^b K(x,s) \varphi(s) ds = f(x) \quad (101)$$

1-текті интегралдық теңдеуінің $L_2[a,b]$ класында жалғыз шешімі бар болуы үшін

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 < +\infty$$

қатарының жинақты болуы қажетті де жеткілікті. Мұндағы $f_k = (f, \varphi_k)$, $f(x) \in L_2[a,b]$ ал λ_k сандары $K(x,s)$ ядросының меншікті мәндері, $\varphi_k(x)$ — оларға сәйкес меншікті функциялары.

Дәлелдеуі. Кәсіптілігі: (101) теңдеуінің $\varphi(x) \in L_2[a,b]$ да шешімі бар деп ұйғарайық. Онда,

$$\begin{aligned} f_k &= \int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx = \int_a^b \left\{ \int_a^b K(x,s) \varphi(s) ds \right\} \varphi_k(x) dx = \\ &= \int_a^b \left\{ \int_a^b K(x,s) \varphi_k(x) dx \right\} \varphi(s) ds = \frac{1}{\lambda_k} \int_a^b \varphi(s) \varphi_k(s) ds. \end{aligned}$$

Бұл теңдікті

$$\int_a^b \varphi(s) \varphi_k(s) ds = \lambda_k f_k \quad (k=1,2,\dots) \quad (102)$$

түрінде жазамыз. Бұдан $\lambda_k f_k$ сандардың $\varphi(x) \in L_2[a,b]$ функциясы үшін Фурье қатарының коэффициенттері екенін көреміз. Бессель теңсіздігі бойынша

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 f_k^2 \leq \int_a^b \varphi^2(x) dx,$$

демек, қатар жинақты.

Жеткіліктілігі: керісінше, қатар жинақты болсын, онда Фишер-Рисс теоремасы бойынша жалғыз ғана $\varphi(x) \in L_2[a, b]$ функциясы табылады, ол үшін $\{\varphi_k(x)\}$ жүйесі бойынша $\lambda_k f_k$ Фурье коэффициенттері болады, яғни (102) теңдігі орынды. Ал $f(x) \in L_2[a, b]$ функциясы қатарға

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \varphi_n(x)$$

түрінде жіктеледі.

Екінші жағынан (102) теңдігін ескерсек,

$$\begin{aligned} \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds, \varphi_n(x) \right) \varphi_n(x) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b \varphi(s) \int_a^b K(x, s) \varphi_n(x) dx ds \right) \varphi_n(x) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \left(\int_a^b \varphi(s) \varphi_n(s) ds \right) \varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \varphi_n(x). \end{aligned}$$

Олай болса, соңғы екі теңдіктерден

$$f(x) = \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds,$$

яғни $\varphi(x)$ функциясы (102) теңдеуін қанағаттандырады және оның шешімі болады.

Егер $K(x, s)$ ядросы тұйық болмаса, онда (101) теңдеуінің шешімі көп болады. $\omega(x) \neq 0$ және $\int_a^b K(x, s) \omega(s) ds = 0$ болсын. Ол кезде, егер $\varphi_0(x)$ функциясы (101) теңдеуінің шешімі болса, онда $\varphi_0(x) + c\omega(x)$ функциясы да ол теңдеудің шешімі болады (мұндағы, c – тұрақты шама). $K(x, s)$ – ерекшеленген ядро болса, ол тұйық емес, сондықтан (101) теңдеуінің шешімі ақырсыз көп тұрақты шамаларға байланысты болады. Ал (101) теңдеуінің шешімі бар және ол жалғыз болуы үшін $K(x, s)$ ядросының тұйық болуы өте маңызды.

Фредгольмнің кейбір I-текті теңдеулерін шешу үшін біртіндеп жуықтау әдісін қолдануға болады.

Теорема. (101) теңдеуінің ядросы $K(x, s) \in L_2[a, b]$ симметриялық және оң болып, ол теңдеу бір мәнді шешілсін. Сонда

$$\varphi_n(x) = \varphi_{n-1}(x) + \lambda \int_a^b \left[f(x) - \int_a^b K(x, s) \varphi_{n-1}(s) ds \right] dx \quad (103)$$

рекурренттік формуласымен анықталатын $\{\varphi_n(x)\}$ тізбегі (101) теңдеуінің шешіміне орташа жинақты болады, мұндағы, $\varphi_0(x) \in L_2[a, b]$ λ саны $0 < \lambda < 2\lambda_2$ шартты қанағаттандырады, ал $\lambda_1 - K(x, s)$ ядросының ең кіші меншікті мәні.

Дәлелдеуі. (103) теңдігіне $\varphi_n(x) = \varphi(x) + \psi_n(x)$ деп алсақ,

$$\psi_n(x) = \psi_{n-1}(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) \psi_{n-1}(s) ds$$

өрнегін аламыз. Мұның екі жағында $K(x, s)$ ядросының меншікті функциялары $v_i(x)$ -ке көбейтіп, x бойынша a -дан b -ға дейін интегралдасақ,

$$a_i^{(n)} = a_i^{(n-1)} - \lambda \int_a^b v_i(x) \left(\int_a^b K(x, s) \psi_{n-1}(s) ds \right) dx,$$

мұнда

$$a_i^{(0)} = \int_a^b \psi_n(x) v_i(x) dx.$$

Енді $K(x, s)$ ядросы симметриялық ядро екенін ескеріп және

$$v_i(x) = \lambda_i \int_a^b K(x, s) v_i(s) ds$$

теңдігін пайдаланып,

$$\int_a^b v_i(x) \left\{ \int_a^b K(x, s) \psi_{n-1}(s) ds \right\} dx = \frac{1}{\lambda_i} a_i^{(n-1)}$$

өрнегін аламыз. Сонымен

$$a_i^{(n)} = \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_i} \right) a_i^{(n-1)} = \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_i} \right)^n a_i^{(0)}.$$

Мынадай

$$\int_a^b \psi_n^2(x) dx = \int_a^b [\varphi_n(x) - \varphi(x)]^2 dx$$

интегралды қарастырайық. $\{\varphi_n(x)\}$ жүйенің толықтығын ескерсек,

$$\int_a^b \psi_n^2(x) dx = \sum_{i=1}^n (a_i^{(n)})^2 \quad (\text{Парсеваль теңдігі})$$

немесе

$$\int_a^b \psi_n^2(x) dx = \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_i}\right)^{2n} (a_i^{(0)})^2 \quad (n=1,2,\dots)$$

ал $0 < \lambda < 2\lambda_2$ теңсіздігінен $\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_i}\right)^2 \leq 1$. Сондықтан $\varepsilon > 0$ үшін $N = N(\varepsilon)$

нөмірі табылып, $n > N(\varepsilon)$ болғанда

$$\sum_{i=1}^n (a_i^{(n)})^2 < \varepsilon$$

болады. Демек,

$$\int_a^b [\varphi_n(x) - \varphi(x)]^2 dx = \int_a^b \psi_n^2(x) dx < \varepsilon,$$

яғни $\{\varphi_n(x)\}$ тізбегі интегралдық теңдеудің шешімі $\varphi(x)$ функциясына орташа жинақты.

Мысалы. Біртекті интегралдық

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (5xt^3 + 4x^2t + 3xt) \varphi(t) dt$$

теңдеуінің меншікті мәндері мен меншікті функцияларын табайық.

Шешуі. Теңдеуді басқаша жазайық:

$$\varphi(x) = 5\lambda x \int_{-1}^1 t^3 \varphi(t) dt + \lambda(4x^2 + 3x) \int_{-1}^1 t \varphi(t) dt,$$

одан кейін

$$c_1 = \int_{-1}^1 t^3 \varphi(t) dt, \quad c_2 = \int_{-1}^1 t \varphi(t) dt$$

деп белгілесек, берілген теңдеуді: $\varphi(x) = 5\lambda c_1 x + \lambda c_2 (4x^2 + 3x)$. деп жазамыз. Бұл өрнектің екі жағында x^3 пен x -ке көбейтіп, x бойынша -1 -ден $+1$ -ге дейін интегралдап,

$$c_1 = \int_{-1}^1 x^3 \varphi(x) dx = 2c_1 \lambda + \lambda c_2 \frac{6}{5},$$

$$c_2 = \int_{-1}^1 x \varphi(x) dx = 5\lambda c_1 \frac{2}{3} + \lambda c_2 \frac{6}{3}$$

немесе c_1 мен c_2 -ні анықтайтын $5c_1(1-2\lambda) - 6\lambda c_2 = 0$, $-10\lambda c_1 + 3(1-2\lambda)c_2 = 0$

теңдеулер жүйесін аламыз. Бұл жүйенің нөлдік емес шешімі бар болуы үшін

$$\begin{vmatrix} 5(1-2\lambda) - 6\lambda & \\ -10\lambda & 3(1-2\lambda) \end{vmatrix} = 0,$$

яғни $\lambda = \frac{1}{4}$ болуы керек. Міне бұл $\lambda = \frac{1}{4}$ саны жоғарыдағы теңдеудің

ядросының меншікті мәні, ал меншікті функцияны табу үшін жүйеге λ -ның мәнін қойып, $c_1 = 0,6c_2$ екенін табамыз. Бұл c_1 -ді пайдаланып, $\varphi(x) = c_2(1,5x + x^2)$ берілген теңдеу ядросының меншікті функциясы екенін анықтаймыз. Егер соңғы теңдікке $c_2 = 1$ деп мәнін қойсақ, онда меншікті функция $\varphi(x) = x^2 + 1,5x$ болады.